Спецкурс «Параллельная обработка больших графов»

Лекция 3

к.т.н. Александр Сергеевич Семенов

dislab.org

НИЦ ВТ

DISLab

Определения

- **Дерево** – связный граф без циклов
- **Остовное дерево связного графа** – подграф, являющийся деревом и связывающий все вершины исходного графа
- **Лес** – граф, каждая связная компонента которого является деревом
- **Остовный лес для графа G** – граф, являющийся объединением остовных деревьев всех компонент связности G

Задача построения минимального остовного дерева (Minimum Spanning Tree, MST)

- **Минимальный остовный лес графа G** – остовный лес, вес которого не превосходит вес любого другого возможного остовного дерева графа G
- **Minimum Spanning Tree**
  - Дан неориентированный граф G = (V, E, W)
  - W: E → R[0;1] – весовая функция
  - Найти минимальный остовный лес графа G

Алгоритмы решения задачи MST

- Прима, 1957
- Крускала, 1950/1930
- Борувки, 1926
- GHS (Gallager, Humblet, Spira), 1983

MST, жадные алгоритмы

MST (G, w)
A = {} // множество ребер
while A не является остовным деревом
    (u, v) = argmin W[(u, v)],
        u ∈ ребру из A, v ∉ ни одному ребру из A
    A = A U {(u, v)}
end while

MST, алгоритм Прима

```
MST-Prim (G, w, r) // G – связный граф
for all u∈V do u.key=inf; u.par=undef end for
key[r] = 0
Q = V
A = {}
while Q <> {}
        u = ExtractMin(Q)
        A = A U {(u.par, u)}
        for all v∈Adj[u]
            if v∈Q and w(u,v) < key[v]
                v.key=w(u,v); v.par = u
                // с вызовом DecreaseKey(Q, v, w(u, v))
            end if
        end for
end while
```

Сложность **O(M lgN), O(M+N lgN)**

MST, алгоритм Крускала

```
MST-Kruskal (G, w, r) // G – связный граф
A = {}
for all u∈V do MakeSet(u) end for
Sort(E)
for all (u,v)∈E
    if FindSet(u) != FindSet(v)
        A = A U {(u, v)}
        Union(u, v)
    end if
end for
```

Сложность **O(M lgN)**

Система непересекающихся множеств

Также известна как Union-Find

1. **MakeSet(v)** создать отдельное множество из элемента v
2. **FindSet(v)** → **u** найти элемент-представитель множества, содержащего вершину v
3. **Union(u,v)** объединить множества, содержащие элементы u и v

Реализация Union-Find

```
MakeSet (v)
v.parent = v

FindSet (v)
if v.parent == v
    return v
end if
return FindSet(v.parent)

Union (u, v)
x = FindSet(u)
y = FindSet(v)
x.parent = y
```

Оптимизация Union-Find

```
MakeSet (v)
v.parent = v
v.rank = 0

FindSet (v):
if v != v.parent
    v.parent = FindSet(v.parent)
end if
return v.parent
```

Оптимизация Union-Find

Union (u,v)
Link(FindSet(u), FindSet(v))

Link (x, y)
if x.rank > y.rank
    y.parent = x
else
    x.parent = y
    if x.rank == y.rank
        y.rank = y.rank + 1
    end if
end if

Сложность **O(m α(N)) <= O(4m),**
m – количество операций

MST, алгоритм Борувки

MST-Boruvka (G, w, r) // G – связный граф
T = {{v_0}, {v_1}, …}
while |T| > 1
    for all component $C_i \in T$
        (u, v) = argmin W[(u, v)], $u \in C_i$, $v \notin C_i$
        $C_i = C_i \cup \{(u, v)\}$
    end for
end while

Сложность **O(M lgN)**

MST, алгоритм Борувки

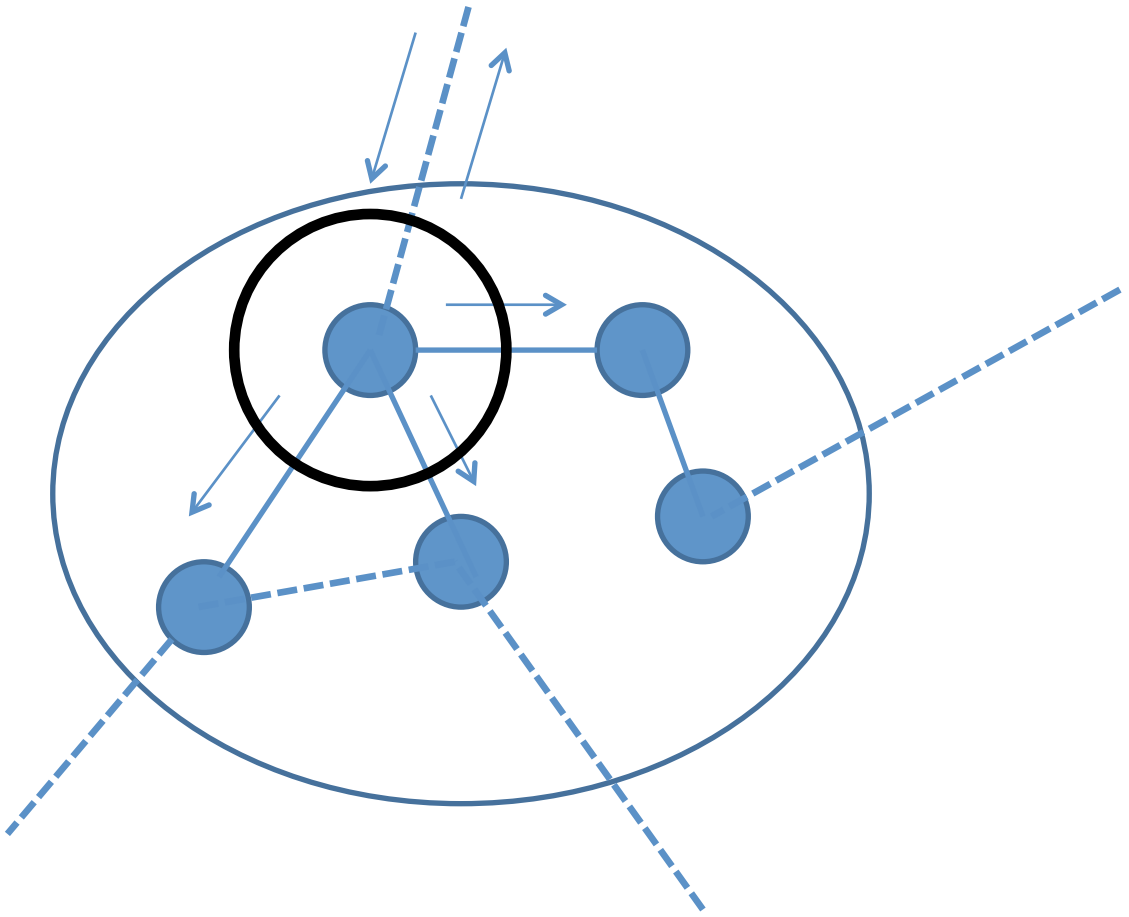
MST-Boruvka (G, w, r) // G – связный граф
T = {{v_0}, {v_1}, …}
while |T| > 1
    #pragma omp parallel for
    for all component $C_i \in T$
        (u, v) = argmin W[(u, v)], $u \in C_i$, $v \notin C_i$
        $C_i = C_i \cup \{(u, v)\}$
    end for
end while

Проблема:

1. Циклы

Асинхронный алгоритм GHS (R. Gallager, P. Humblet, P. Spira, 1983)

- Веса должны быть различны, граф - связный



Асинхронный алгоритм GHS (R. Gallager, P. Humblet, P. Spira, 1983)

The Algorithm (As Executed at Each Node)

```
(1) Response to spontaneous awakening (can occur only at a node in the sleeping
state)
        execute procedure wakeup

(2) procedure wakeup
        begin let m be adjacent edge of minimum weight;
        SE (m ) ← Branch;
        LN ← 0;
        SN ← Found;
        Find-count ← 0;
        send Connect(O) on edge m
    end

(3) Response to receipt of Connect(L) on edge j
        begin if SN = Sleeping then execute procedure wakeup;
        if L < LN
          then begin SE (j) ← Branch;
                     send Initiate(LN, FN, SN) on edge j;
                     if SN = Find then
                        find-count ← find-count + 1
                end
        else if SE(j) = Basic
                then place received message on end of queue
                else send Initiate(LN + 1, w(j), Find) on edge j
        end

(4) Response to receipt of Initiate (L, F, S) on edge j
        begin LN ← L; FN ← F; SN ← S; in-branch ← j;
                best-edge ← nil; best-wt ← ∞;
                for all i ≠ j such that SE(i) = Branch
                   do begin send Initiate(L, F, S) on edge i;
                             if S = Find then find-count ← find-count + 1
                        end;
                if S = Find then execute procedure test
        end

(5) procedure test
        if there are adjacent edges in the state Basic
                then begin test-edge ← the minimum-weight adjacent edge in state
        Basic;
                             send Test(LN, FN) on test-edge
                        end
        else begin test-edge ← nil; execute procedure report end

(6) Response to receipt of Test(L, F) on edge j
        begin if SN = Sleeping then execute procedure wakeup;
                if L > LN then place received message on end of queue
                else if F ≠ FN then send Accept on edge j
                        else begin if SE (j) = Basic then SE (j) ← Rejected;
                                if test-edge ≠ j then send Reject on edge j
                                        else execute procedure test
                             end
                        end

(7) Response to receipt of Accept on edge j
        begin test-edge ← nil;
                if w(j) < best-wt
                  then begin best-edge ← j; best-wt ← w(j) end;
                execute procedure report
        end

(8) Response to receipt of Reject on edge j
        begin if SE (j) = Basic then SE (j) ← Rejected;
                execute procedure test
        end

(9) procedure report
        if find-count = 0 and test-edge = nil
          then begin SN ← Found;
                     send Report(best-wt) on in-branch
        end

(10) Response to receipt of Report(w) on edge j
        if j ≠ in-branch
          then begin find-count ← find-count - 1
                     if w < best-wt then begin best-wt ← w; best-edge ← j end;
                     execute procedure report
                end
          else if SN = Find then place received message on end of queue
                else if w > best-wt
                        then execute procedure change-core
                        else if w = best-wt = ∞ then halt

(11) procedure change-core
        if SE (best-edge) = Branch
                then send Change-core on best-edge
        else begin send Connect(LN) on best-edge;
                SE (best-edge) ← Branch
        End

(12) Response to receipt of Change-core
        execute procedure change-core
```

Объединение фрагментов

- У каждого фрагмента есть переменная – уровень L
- Сначала уровень каждого фрагмента L = 0
- Два фрагмента с одинаковым уровнем L могут объединится во фрагмент с уровнем L + 1
- Фрагмент не может присоединиться к фрагменту с меньшим уровнем

Состояния вершин и ребер

Состояния ребер

- Rejected – ребро не является частью MST
- Branch – ребро является частью MST
- Basic – статус ребра еще не определен

Состояния вершин

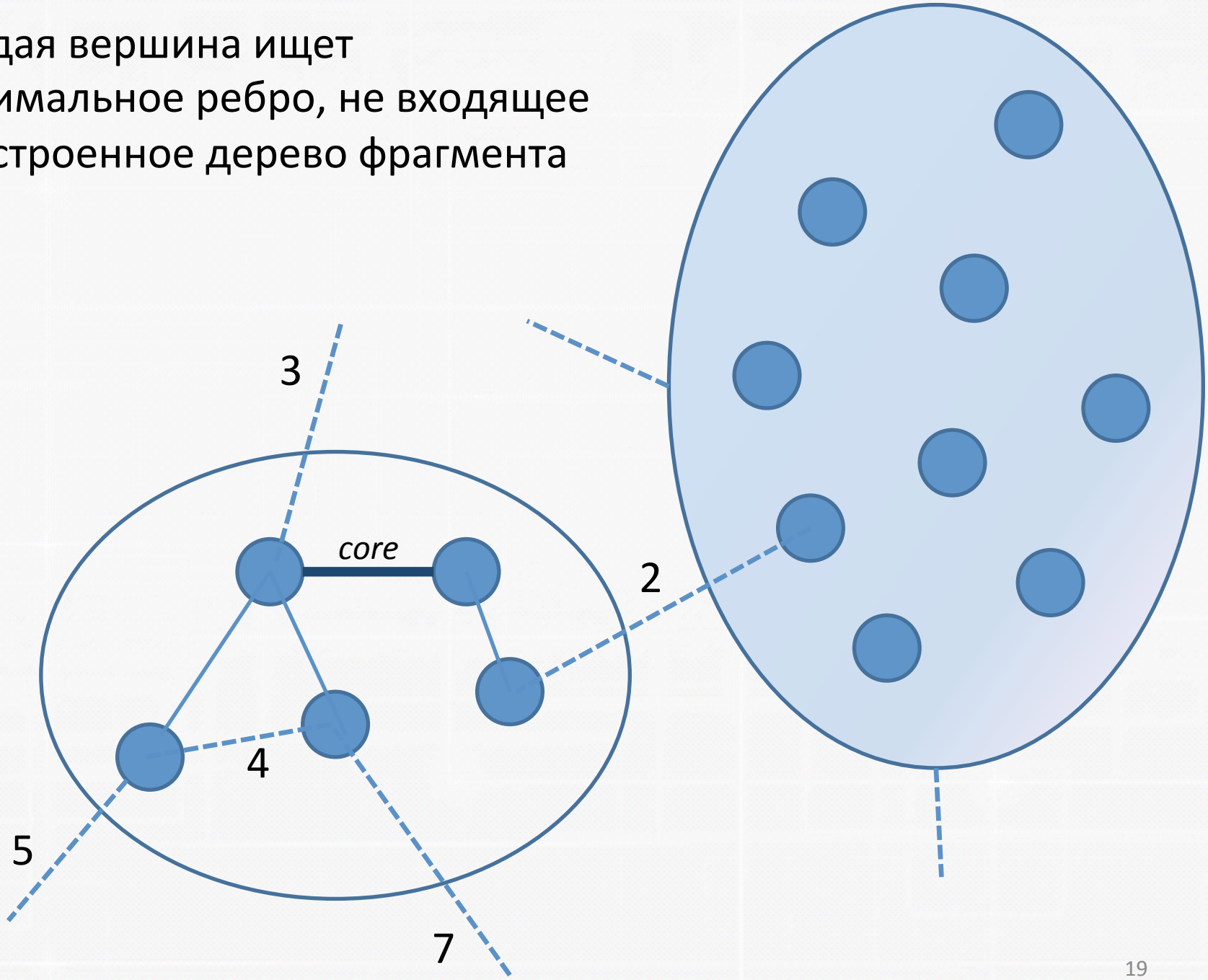
- Sleeping – начальное состояние
- Find – происходит поиск минимального ребра
- Found – минимальное ребро найдено

Сообщения между вершинами

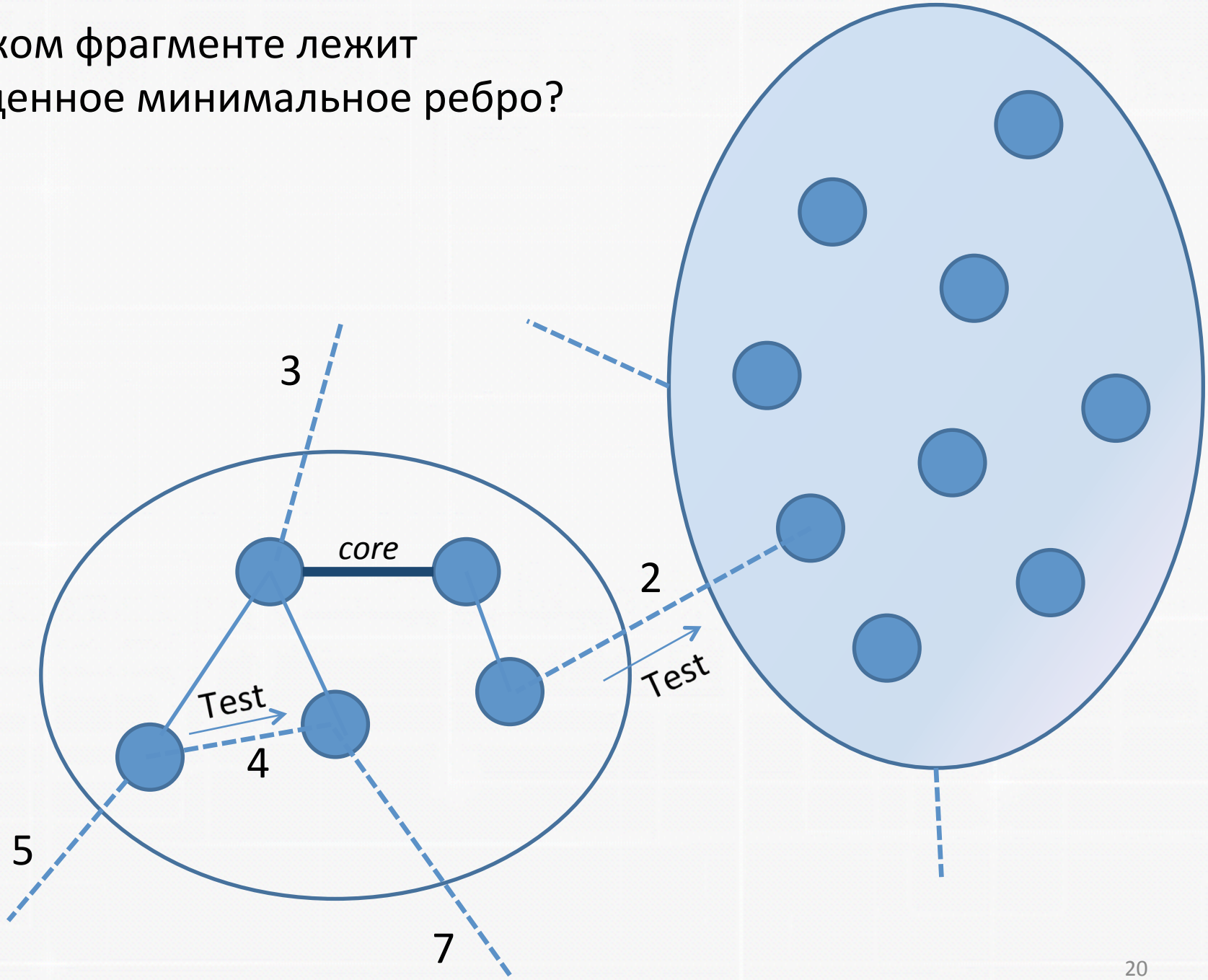
Всего 7 типов сообщений:

- Test (различные фрагменты?)
  - Accept (различные)
  - Reject (один и тот же фрагмент)
- Report (отчет о наименьшем ребре)
- Change core (переход от корня к наилучшему ребру внутри фрагмента)
- Connect (запрос об объединении)
- Initiate (обновление данных и начало нового поиска наилучших ребер)

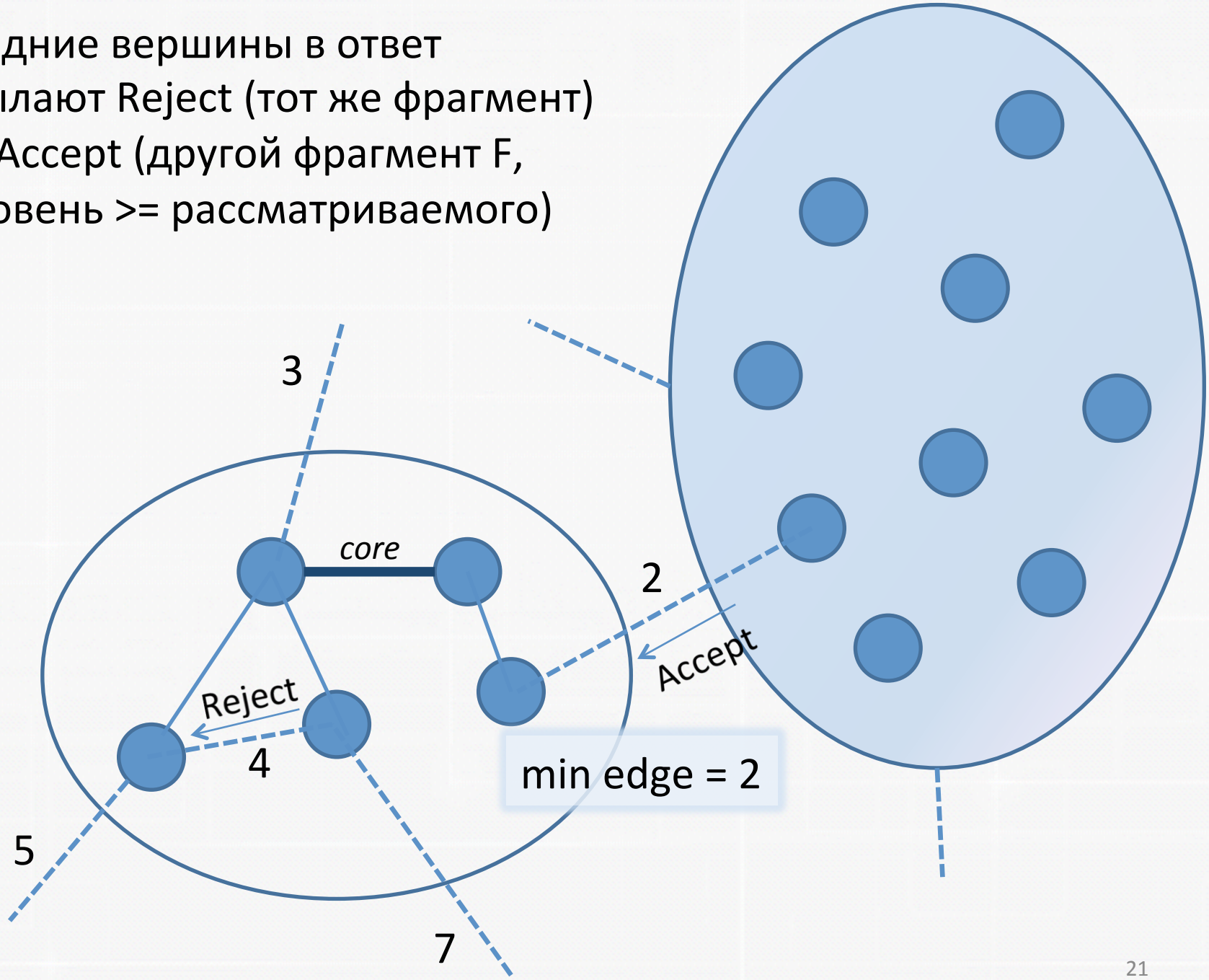
Каждая вершина ищет минимальное ребро, не входящее в построенное дерево фрагмента



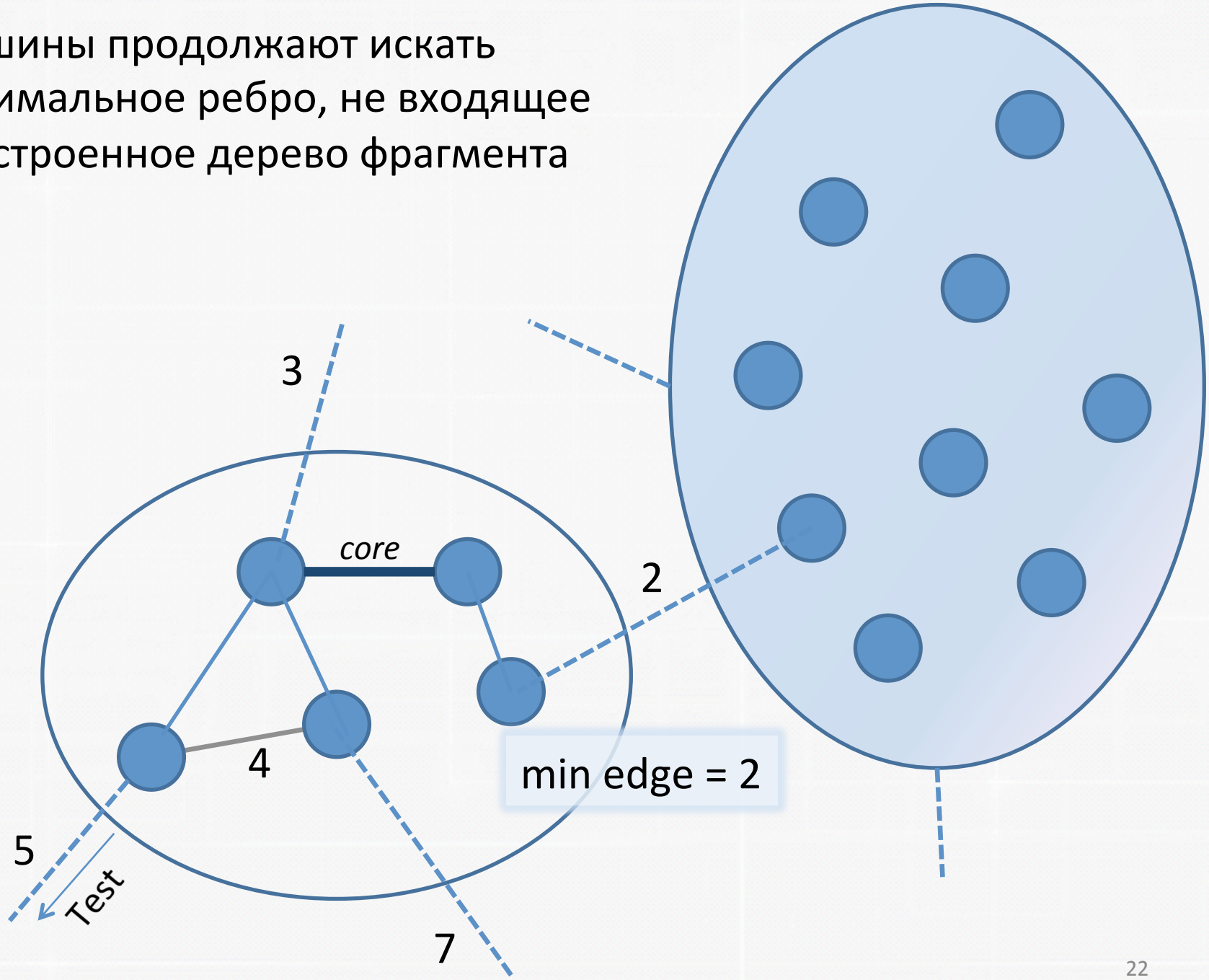
В каком фрагменте лежит найденное минимальное ребро?



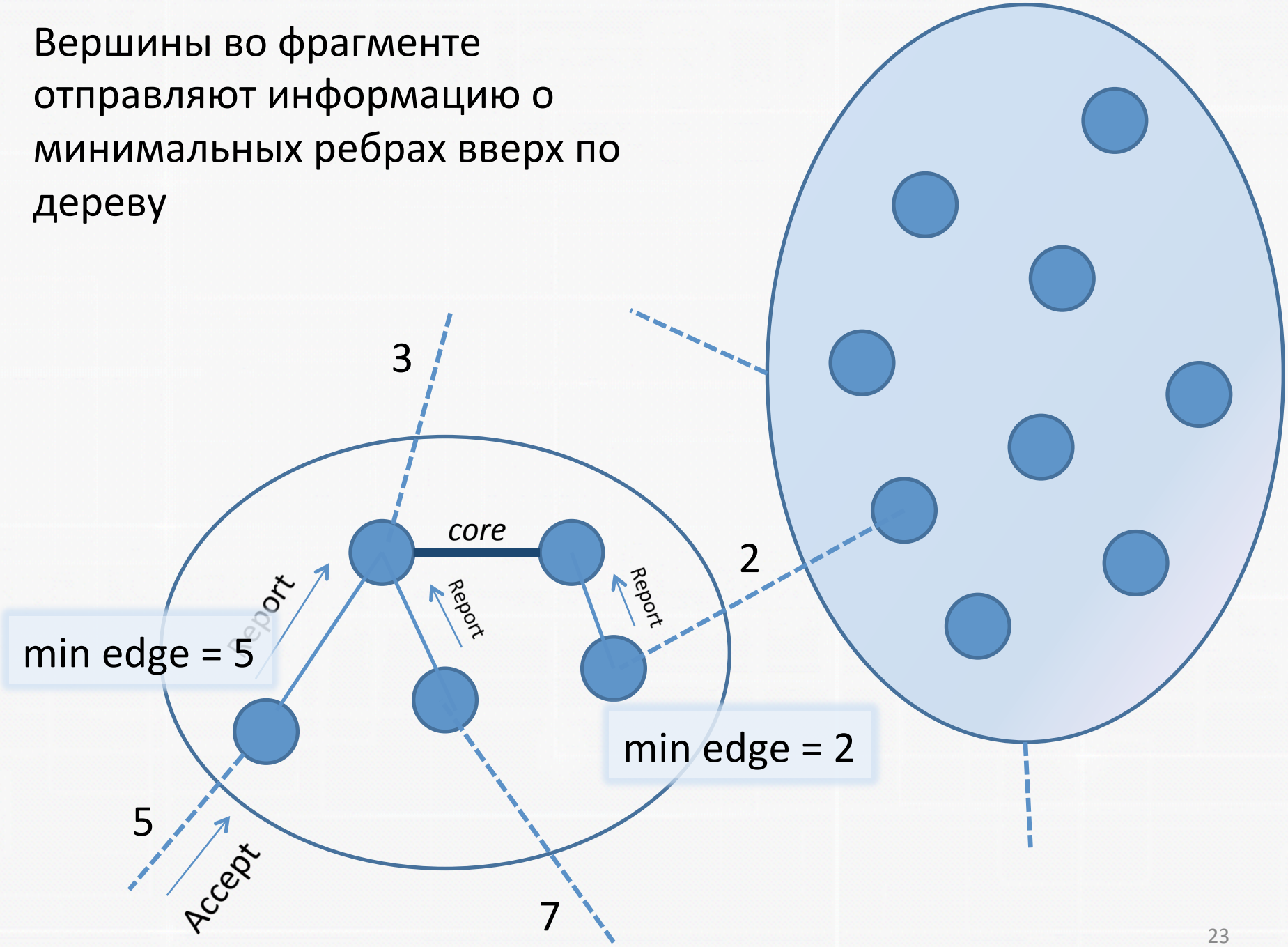
Соседние вершины в ответ посылают Reject (тот же фрагмент) или Accept (другой фрагмент F, F.уровень >= рассматриваемого)



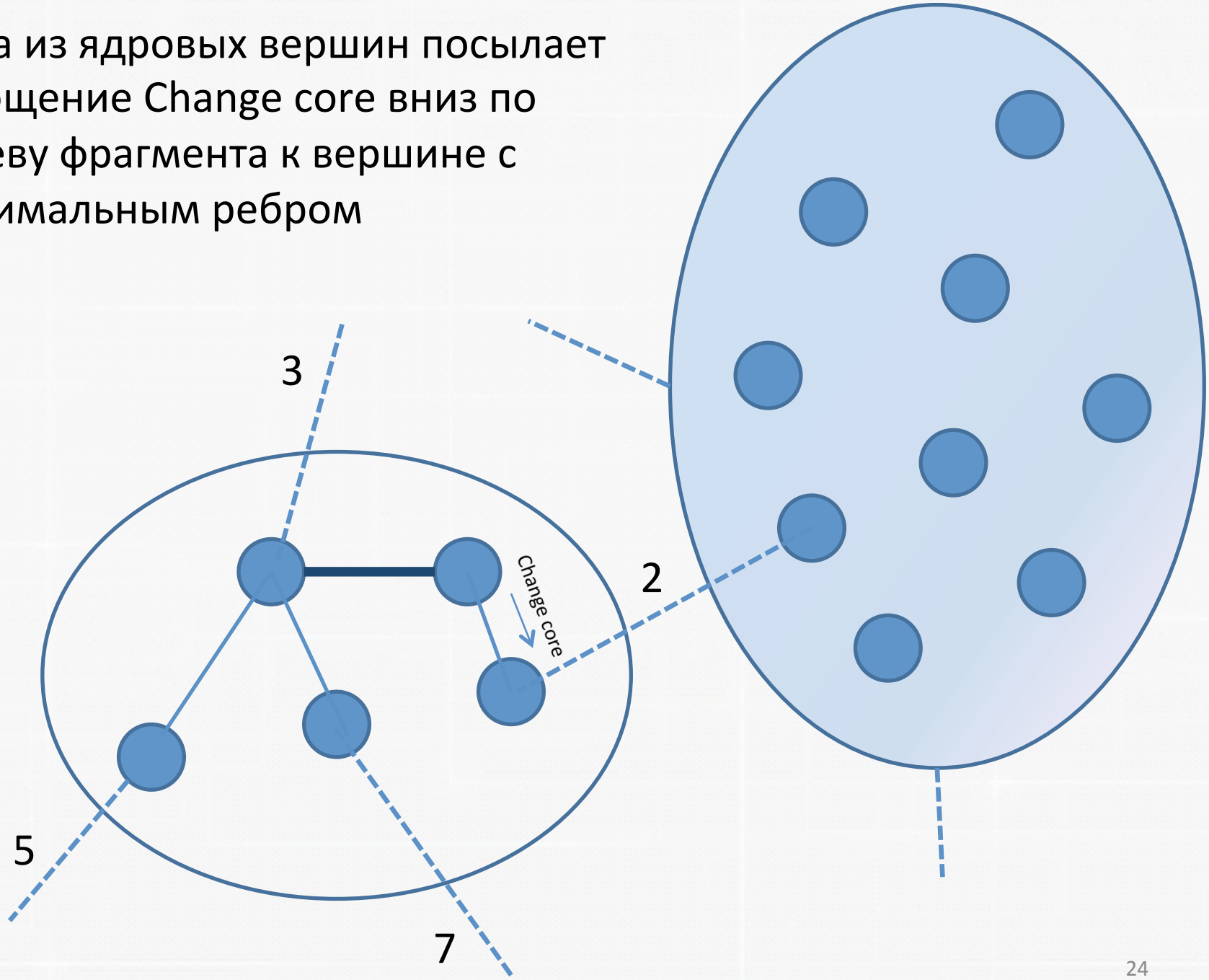
Вершины продолжают искать минимальное ребро, не входящее в построенное дерево фрагмента



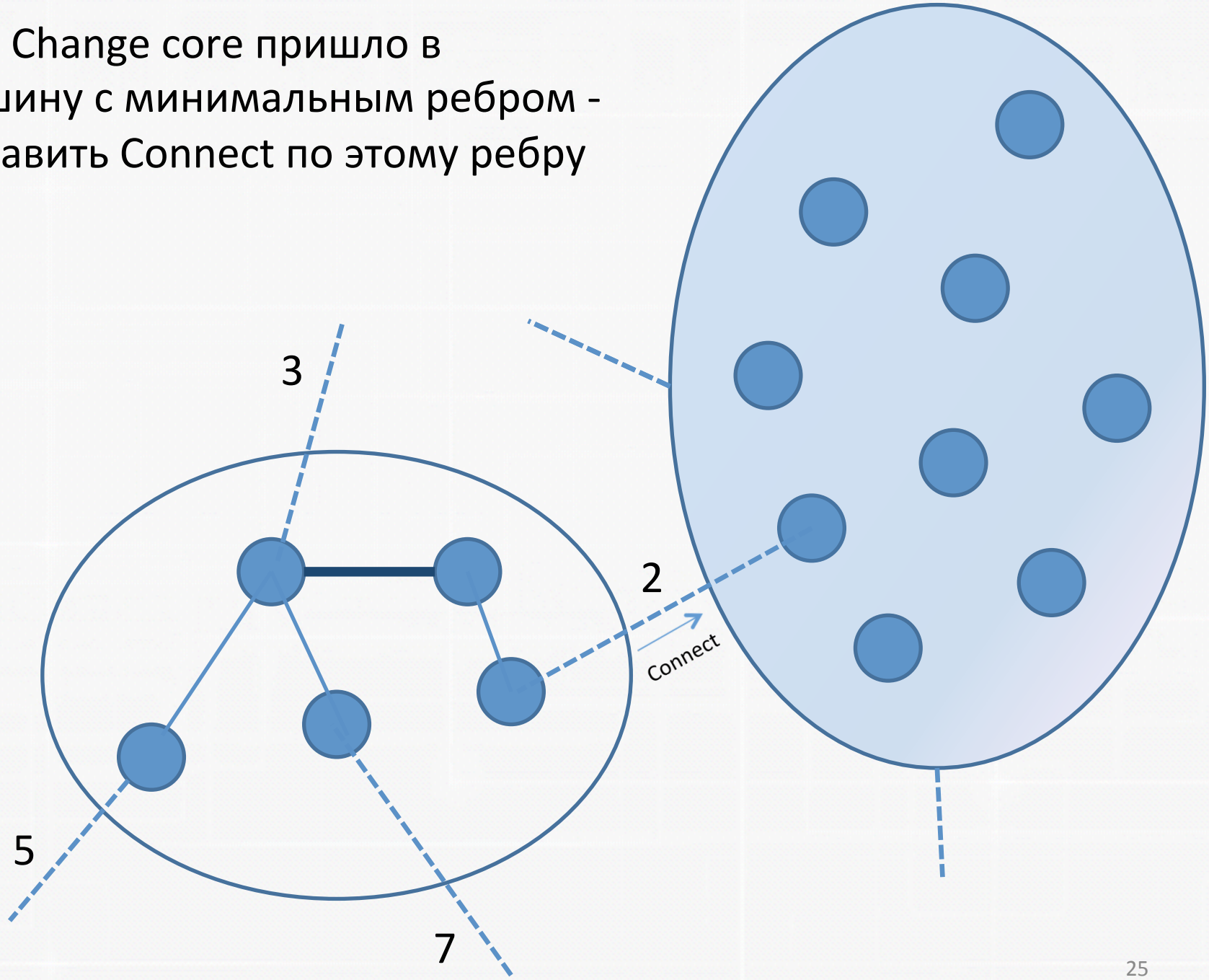
Вершины во фрагменте отправляют информацию о минимальных ребрах вверх по дереву



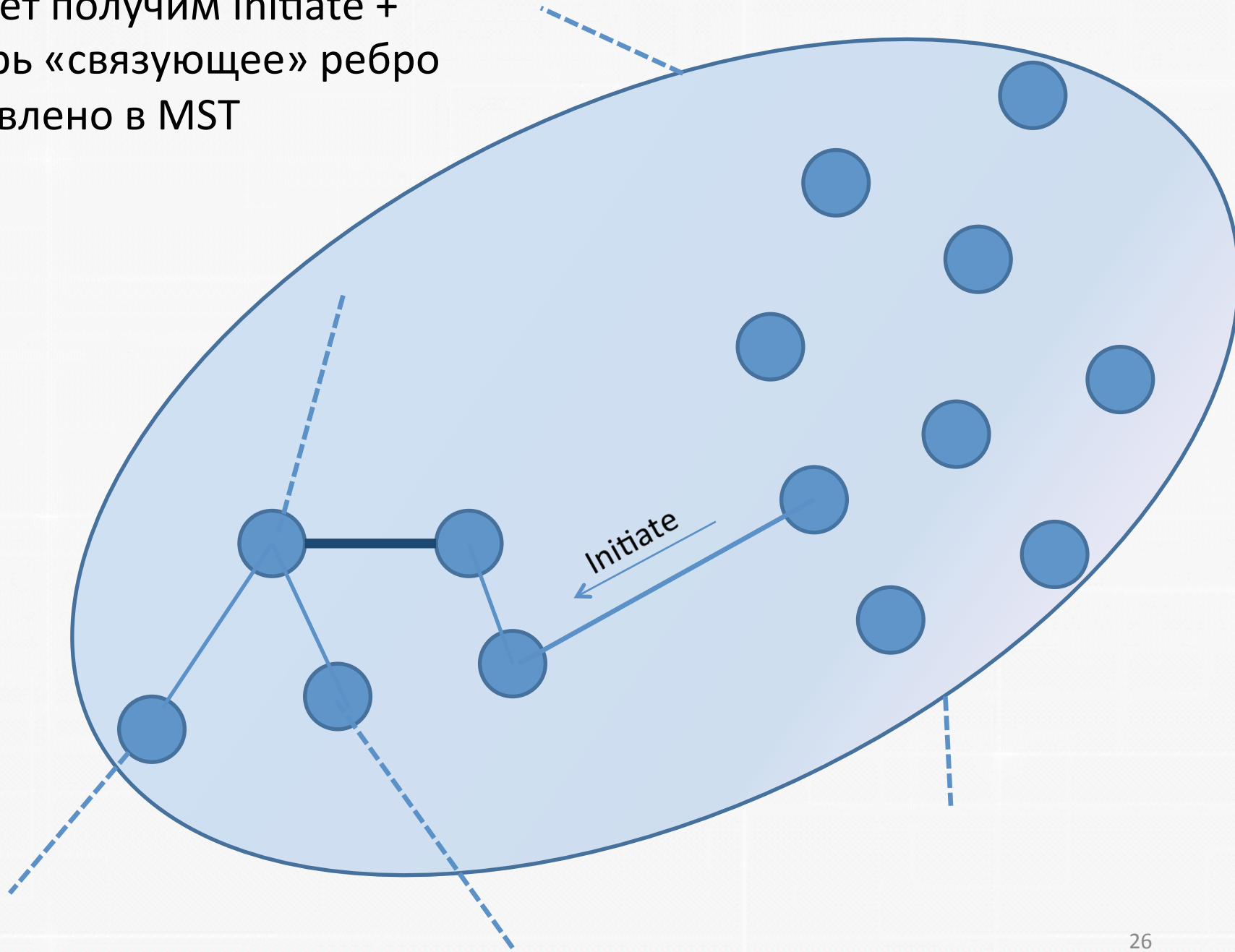
Одна из ядровых вершин посылает сообщение Change core вниз по дереву фрагмента к вершине с минимальным ребром



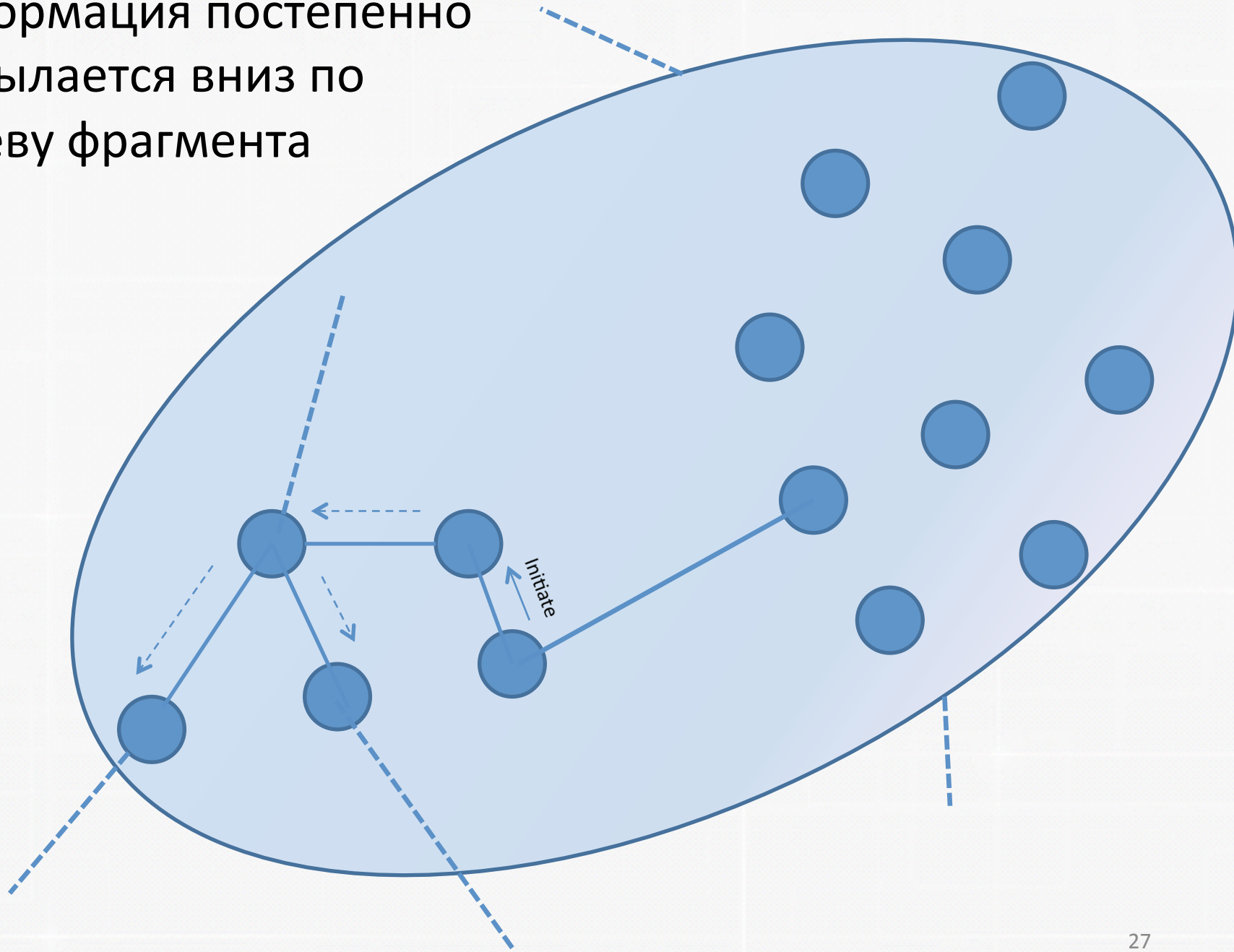
Если Change core пришло в вершину с минимальным ребром - отправить Connect по этому ребру



В ответ получим Initiate + теперь «связующее» ребро добавлено в MST



Информация постепенно рассылается вниз по дереву фрагмента



Асинхронный алгоритм GHS (R. Gallager, P. Humblet, P. Spira, 1983)

- Количество сообщений – не более $5N \log_2 N + 2M$
- Время – $5N \log_2 N$